

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET  
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA  
POLIANA FERREIRA DO PRADO

*Integrais de Linha*  
**-Matemática Aplicada-**

VITÓRIA DA CONQUISTA - BAHIA  
SETEMBRO DE 2013

POLIANA FERREIRA DO PRADO

*Integrais de Linha*  
-Matemática Aplicada-

Monografia apresentada ao curso de Matemática da  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia –  
UESB como requisito para obtenção do grau de  
Licenciando em Matemática.

Orientador: Antônio Augusto Oliveira Lima

Vitória da Conquista

2013

POLIANA FERREIRA DO PRADO

*Integrais de Linha*  
-Matemática Aplicada-

Monografia apresentada ao curso de Matemática da  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia –  
UESB como requisito para obtenção do grau de  
Licenciando em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

---

Antônio Augusto Oliveira Lima

---

Clênia de Andrade Oliveira de Melo

---

Wallace Juan Teixeira Cunha

*À Deus:*

*“Em seu poder estamos nós, as nossas palavras, a  
nossa inteligência e as nossas habilidades.”*

*Sabedoria 7, 16*

## **AGRADECIMENTOS**

Meu grandessíssimo agradecimento a Deus que assume todo senhorio em minha vida. Eternamente minha gratidão por sempre estar ao meu lado, com cuidado, carinho e amor a todo instante.

A minha família, em especial minha mãe, quem se orgulha de mim, quem me ensinou os preciosos valores da vida. Ao meu cunhado e minha irmã, pela compreensão e companheirismo. As minhas queridíssimas amigas, por fazerem parte da minha vida. (um beijo no coração de cada um!).

Aos Mestres, aqueles os quais os tenho como referencial, de professor, de educador, podendo aqui com muito aprazimento lembrar-me de Augusto por tal exemplo e muito mais, foi muito honroso pra mim, tê-lo como orientador deste trabalho. Meu muito obrigada!

## **RESUMO**

Apresentar brevemente fatos de importantes personagens que permeiam acontecimentos históricos relacionados à construção do Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral fazendo embasamento para o estudo do cálculo da Integral de Linha e algumas aplicações.

Palavras chaves: Campo Vetorial, Cálculo Integral e Integral de Linha.

## **ABSTRACT**

Briefly present facts of important characters that permeate historical events related to the construction of Differential Calculus and Integral Calculus making foundation for the study of calculating the Integral Line.

Keywords: Vector Field, Integral Calculus and Integral Line.

*E se é a inteligência quem opera, quem mais do que  
ela é artífice do que existe?*

*Sabedoria 8, 7*



## SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO .....	9
1	ASPECTOS HISTÓRICOS.....	11
2	CÁLCULO VETORIAL.....	16
	2.1 CAMPOS VETORIAIS .....	16
3	CAMPOS GRADIENTES .....	18
4	ROTACIONAL DE UM CAMPO DE VETORES.....	18
5	DIVERGÊNCIA DE UM CAMPO DE VETORES .....	19
6	INTEGRAIS DE LINHA .....	21
	6.1 INTEGRAIS DE LINHAS DE CAMPOS VETORIAIS.....	2
	6.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DAS INTEGRAIS DE LINHAS .....	25
	6.3 INDEPENDÊNCIA DO CAMINHO .....	26
	6.4 TEOREMA DE GREEN.....	28
	6.5 APLICAÇÕES DA INTEGRAL DE LINHA DE UM CAMPO VETORIAL.....	31
	6.5.1 CÁLCULO DO TRABALHO REALIZADO POR UMA FORÇA .....	31
	6.6.2 CÁLCULO DE ÁREA UTILIZANDO O TEOREMA DE GREEN .....	32
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	33
	REFERÊNCIAS .....	34

# Introdução

A elaboração deste trabalho é baseada numa pesquisa não tanto extensa, mas o essencial para escrita do mesmo. Esse texto tem como intuito fazer uma breve apresentação dos precursores relacionados ao surgimento do Cálculo, este que segue como tema geral, o qual abordaremos por seguinte.

O Cálculo diferencial e Integral se desenvolveu com os estudos de Isaac Newton (1643- 1727) e Gottfried Leibniz (1646- 1716) que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as derivadas e as integrais.

Seguindo a linha do trabalho, será feita a abordagem das Integrais – Integral de Linha.

As integrais de Linha são de uma importância fundamental em inúmeras aplicações, tais como, ligação com energia potencial, fluxo de calor, circulação de fluídos, utiliza-se para calcular área de superfície, comprimento de curvas e etc.

Com estas ideias finalizaremos o trabalho mostrando algumas aplicações das Integrais de Linha.

# Capítulo 1

## Aspectos Históricos

Neste capítulo faremos brevemente um estudo do surgimento do Cálculo, perpetraremos uma apresentação geral de alguns acontecimentos históricos, não deixando despercebidos os fatos importantes que estão relacionados à construção deste instrumento cabendo nesse texto fazer referências aos colaboradores para tal surgimento. Sendo assim veremos a participação de Bonaventura Cavalieri (1598--1647), Pierre Fermat (1601--1665), Isaac Barrow (1630--1677), Georg Riemann (1826 - 1866) e Johannes Kepler (1571 – 1630) que foram cruciais nesse desenvolvimento. E só então veremos que próximo ao final do século XVII por Isaac Newton (1601--1665) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646--1716) que se deu o aperfeiçoamento do que já se conhecia, dando-se a origem ao Cálculo Diferencial e Cálculo Integral.

O Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, podendo também ser chamado de Cálculo Infinitesimal ou apenas Cálculo, é uma importante ferramenta para a Matemática, desenvolvida por personagens importantes a partir da Álgebra e da Geometria.

Neste sentido podemos fazer citação do alemão Johannes Kepler sendo este, astrônomo, matemático e físico. Seus trabalhos publicados mostram a semelhança com o que ainda poderia ser visto e utilizado no cálculo integral, assim, fez em pouco mais de duas décadas um trabalho árduo e com várias tentativas frustradas sobre a astronomia, então depois de muita paciência criou-se suas duas primeiras leis sobre o movimento planetário. E dez anos seguintes criou sua terceira lei. Estas leis mudaram a astronomia e tiveram papéis fundamentais no desenvolvimento da matemática.

Kepler, com sua segunda lei, *o raio vetor que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais*, foi percussor do cálculo, pois, foi necessário em seus trabalhos recorrer ao cálculo integral. No início do século XVII estando em Linz na Áustria envolveu em seus trabalhos ao calcular os volumes dos tonéis de vinho, ideia propícia pela época, nesse trabalho aplicou também processos de integração para achar volumes de sólidos obtidos pela rotação de segmentos de secções cônicas em torno de um eixo de seu plano. Este estudioso, apesar de uma vida turbulenta, juntou sua imaginação às verdades científicas e conquistou um ótimo trabalho.

Por sua vez, Bonaventura Cavalieri, nascido em Milão na Itália. Ainda muito jovem se dedicou à geometria e em pouco tempo já havia absorvido as obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio e Pappus. Teve também como interesse de estudos outras áreas, tais como: As seções cônicas, a trigonometria, astronomia e a óptica.

Más é possível que o trabalho já citado de Kepler possa ter influenciado Cavalieri quando desenvolveu uma teoria de indivisíveis.

Para uma região bidimensional. Considerou a coleção de "todas as retas" como sendo um único número, a área da região. Foi um estudante de Galileu, juntos estudaram o cálculo, com isso aprendeu os fundamentos e desenvolveu o seu método dos indivisíveis.

Pierre Fermat nasceu em berço francês, estudou os clássicos e pode aprender latim, grego, italiano e espanhol. Mesmo hesitando publicar as suas obras, foi considerado um dos maiores matemáticos do século XVII. Escreveu vários artigos e notas sobre matemática, mas publicou apenas uma obra. Raramente fez descrições completas.

Além de poder ser reconhecido como um dos maiores matemáticos atuou no campo da física e da teoria dos números. Fermat pode figurar o conceito de que a área sob uma curva poderia ser vista como o limite das somas das áreas do retângulo e também desenvolveu um método para encontrar os centros das formas demarcadas por curvas no plano. A fórmula padrão para calcular o comprimento do arco e encontrar a área de uma superfície de revolução e o teste da derivada para valores extremos das funções também foram concebidas por ele. Estudou valores mínimos e máximos das funções, antecipando o cálculo diferencial, e escreveu um relato não publicado sobre seções cônicas.

Isaac Barrow inglês nascido em Londres, foi uma irrequieta criança tão como nos seus primeiros tempos de escola, na sua época foi um dos melhores especialistas em grego e em tempo acadêmico projetou-se em matemática, física, astronomia e teologia.

Barrow publicou uma regra de tangentes parecida com o método de máximos e mínimos de Fermat. Em uma obra publicada, teve gratidão à ajuda de Newton, que por sua vez foi seu aluno, quando as seus trabalhos de geometria e cálculo que o mesmo aplicou à óptica. Nesta publicação há uma abordagem muito próxima do processo que hoje conhecemos de diferenciação, mediante o uso do chamado *triângulo diferencial*.

Embora, Barrow ter sido um geômetra muito talentoso, pode-se considerar que ele foi o primeiro a perceber, que a diferenciação e a integração são operações inversas. Assim, tornando – uma entidade intelectual única, pois a percepção citada anteriormente fica-se conhecida como *teorema fundamental do cálculo*.

Sem deixar de falar a cerca de Riemann, um estudioso, de maneiras tímidas e saúde fragilizada, nascido em Hanover na Alemanha, estudou na Universidade de Berlim e de Gottingen onde obteve seu doutorado com uma brilhante tese sobre a teoria das funções complexas as chamadas equações diferenciais de Cauchy- Riemann. Teve sua influência na física, mas brilhantemente, esse matemático influenciou a geometria e a análise.

E dos muitos teoremas conseguidos por Riemann em Teoria dos Números e relacionando-os com a análise é que encontramos as chamadas equações de Cauchy – Riemann. Um de seus brilhantes resultados foi perceber que a integral exigia uma definição mais cuidadosa do que a de Cauchy e, baseado em seus conceitos geométricos, concluiu que as funções limitadas são sempre integráveis.

Em 1859, como professor, Riemann sucedeu a Dirichlet na cadeira de Gottingen já ocupada por Gauss. Com apenas quarenta anos de idade e com obras qualificadas, mas com seu estado de saúde muito precário, acometido de tuberculose, Riemann morreu em Selasca na Itália, em 20 de julho de 1866.

Agora, mesmo com tais precursores para o surgimento do cálculo, veremos que em geral esse aparecimento é atribuído a Newton e Leibniz que trabalhando independentemente contribuíram para isso.

Então, no ano de 1642, no dia de natal, nasce Isaac Newton, na cidade de Woolsthorpe. Este há de ser admirável pelo seu poder de raciocínio e seria muito considerado, tanto quanto por cientistas, Newton, que viveu oitenta e quatro anos de idade, na matemática não foi diferente, tinha um vasto e impressionante conhecimento e um grande intelecto. Seu talento sendo percebido desde cedo, e ao ingressar no Trinity College foi possível que se interessasse por matemática, isso o levou a estudar um exemplar de Euclides, leu a *Calvis* de Oughtred, a *Geometria a Renato Des Cartes de Scooten*, trabalhos de Kepler e Viète e a *Aritmetica in finitorum* de Wallis. Parecendo está apto a fazer suas contribuições à matemática, Newton faz descobertas de o teorema do binômio e o cálculo diferencial que por ele foi inventado como o método dos fluxos.

Durante um período de vivência e pensamentos em sua casa, na cidade de Woolsthorpe onde nascera, durante dois anos (1665-1667) após as portas da Universidade de Cambridge terem sido fechadas por causa da peste bubônica, estas descobertas foram acontecidas. Mas foi em 1665 que Newton começou a desenvolver o cálculo, neste tempo já era possível encontrar a tangente a uma curva num de seus pontos e o raio de curvatura respectivo. Mas a conclusão se deu em meados de 1669, escrito em 1671 e alcançando publicação em 1736.

Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feito essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passas a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade de variável ele dava o nome de *fluente* e à sua taxa de variação dava o nome de *fluxo* do fluente. (EVES2004, p.439).

A taxa de geração era designada por uma letra e um ponto sobre ela como em  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  chamadas de “fluxos”. As quantidades  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  eram fluentes com fluxos  $\ddot{x}$  e  $\ddot{y}$ , e assim por diante. As quantidades  $x$  e  $y$  eram fluxos dos fluentes  $x^{\text{I}}$  e  $y^{\text{I}}$  dentro de um quadrado, que por sua vez eram fluxos dos fluentes  $x^{\text{II}}$  e  $y^{\text{II}}$ , e assim por diante. Assim sendo, dadas as relações entre quantidades, encontrar as relações entre os fluxos delas; e vice versa é que se baseava então o problema fundamental do cálculo, dito por Newton.

Este fez numerosas e notáveis aplicações de seu método dos fluxos. Determinou máximos e mínimos, tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas; aplicou-o também a muitas quadraturas e retificações de curvas. Demonstrou habilidade extraordinária na integração de algumas equações diferenciais. (EVES2004, p.439 - 440).

Assim Newton foi não menos que uma figura grandiosa conhecida em todos os tempos, com influência altíssima e belíssima para a matemática.

Veremos a seguir, que Newton, inventor do cálculo, não pode deixar de dividir com Gottfried Wilhelm Leibniz o título de inventor dessa criação.

Sendo assim, Leibniz, nasceu em Leipzig na Alemanha, podendo ser considerado um gênio universal do século XVII, ainda muito jovem alcançou altos níveis de conhecimento nas áreas da teologia, filosofia e matemática. Aos seus dezoito anos já havia obtido o grau de bacharelado. Dois anos se acrescia em sua idade e Leibniz já estava apto ao grau de doutor, porém a sua pouca idade não o permitiu, obteve seu doutorado na universidade em Nuremberg ao se mudar para Altdorf. Nos anos de 1673 e 1676, foram anos que Leibniz esteve em visita à Londres. Na primeira de suas visitas, foi enviado em missão política, na segunda fez exibição de uma máquina de calcular, obra de sua inteligência. Entre os anos de suas visitas a Londres, o cálculo de Leibniz havia tomado forma e com a importância que se dava às notações não fez diferente no cálculo, e foi em 29 de outubro de 1675 que ele utilizou o símbolo de integral, um S alongado. Pouco tempo depois usava  $dx$  e  $dy$  para as diferenciais

em  $x$  e  $y$  e para as somas das ordenada sob uma curva, utilizava o símbolo  $\int y$  e um pouco mais tarde o sinal  $\int y dx$ . Esta simbologia permanece até hoje em nossas notações de cálculo.

Em 1684 Leibniz publicou sua primeira exposição do cálculo diferencial um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais. Uma explicação do cálculo integral, Leibniz publicou em 1686, nesse trabalho, ele apresenta o problema da quadratura como um caso especial do método do inverso das tangentes.

As contribuições de Leibniz à matemática foi expressiva, fez generalização do teorema do binômio em teorema multinomial, a criação dos determinantes no estudo de equações lineares e reelaborou e desenvolveu um conceito de uma lógica simbólica formal. Leibniz foi tanto filósofo como matemático, e suas descobertas para a matemática foi um tanto grandiosa. Foi além de filósofo cientista, mesmo que seus trabalhos na ciência foram ofuscados pelos de Newton, no entanto nos faz perceber que não o tornou menos importante que Newton na descoberta do cálculo os tornando os maiores protagonistas desta criação.

# Capítulo 2

## Cálculo Vetorial

### Campos Vetoriais

Nesta seção estudaremos o cálculo de campos vetoriais, que são funções, cujo domínio é um conjunto de pontos no  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , cuja imagem de vetores em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .

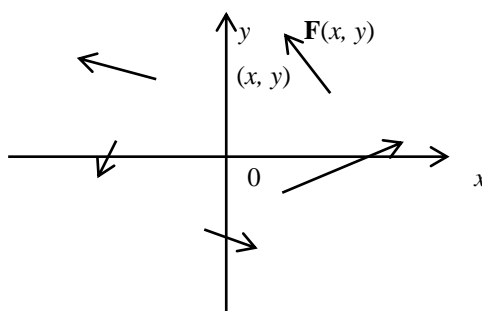
**Definição** Consideremos  $D$  um conjunto em  $\mathbb{R}^2$ . Vamos interpretar  $\mathbf{F}$  é uma função que associa a cada ponto  $(x, y)$  em  $D$  um vetor bidimensional indicado por  $\mathbf{F}(x, y)$ . O conjunto dos vetores  $\mathbf{F}(x, y)$  em  $D$  é chamado de um **campo vetorial**.

Como  $\mathbf{F}(x, y)$  é um vetor bidimensional, podemos escrevê-lo em termos de suas funções componentes  $P$  e  $Q$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j} = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$$

ou ainda podemos escrever assim:  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$

Podemos conhecer um campo vetorial ao tentarmos representar os vetores  $\mathbf{F}(x, y)$ , iniciando por  $(x, y)$ . Obviamente que não podemos representar todos os pontos  $(x, y)$ . Podemos verificar na Figura 2.1.



**Figura 2.1**

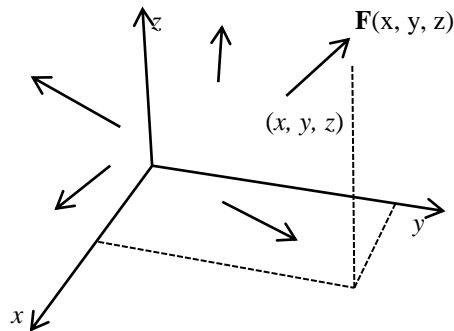
**Definição** Consideremos  $E$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^3$ . Vamos interpretar  $\mathbf{F}$  é uma função que associa a cada ponto  $(x, y, z)$  em  $E$  um vetor tridimensional por  $\mathbf{F}(x, y, z)$ . O conjunto dos vetores  $\mathbf{F}(x, y, z)$  em  $E$  é chamado de um **campo vetorial**.



De mesma forma podemos escrevê-lo em termos de suas funções compostas  $P, Q, R$  como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

Vejamos ilustração na Figura 2.2.

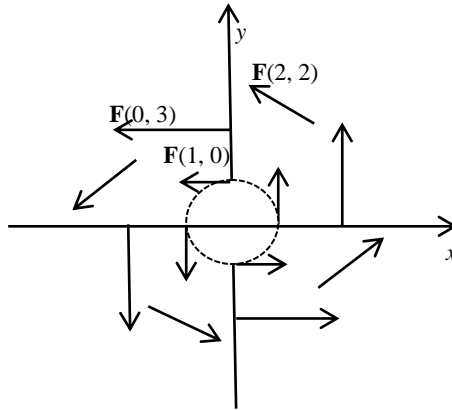


**Figura 2.2**

**Exemplo 1** Um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  é definido por  $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ . Descreva  $\mathbf{F}$  desenhando alguns de seus vetores  $\mathbf{F}(x, y)$ , como na Figura 3.3.

**Solução** Como  $\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$ , desenhamos o vetor  $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$  começando no ponto  $(1, 0)$  na Figura 2.3. Como  $\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$ , desenhamos o vetor  $\langle -1, 0 \rangle$  iniciando no ponto  $(0, 1)$ . Continuamos desse modo desenhando um número significativo de vetores para representar o campo vetorial na Figura 2.3.

$(x, y)$	$\mathbf{F}(x, y)$	$(x, y)$	$\mathbf{F}(x, y)$
$(1, 0)$	$\langle 0, 1 \rangle$	$(-1, 0)$	$\langle 0, -1 \rangle$
$(2, 2)$	$\langle -2, 2 \rangle$	$(-2, -2)$	$\langle 2, -2 \rangle$
$(3, 0)$	$\langle 0, 3 \rangle$	$(-3, 0)$	$\langle 0, -3 \rangle$
$(0, 1)$	$\langle -1, 0 \rangle$	$(0, -1)$	$\langle 1, 0 \rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -2, -2 \rangle$	$(2, -2)$	$\langle 2, 2 \rangle$
$(0, 3)$	$\langle -3, 0 \rangle$	$(0, -3)$	$\langle 3, 0 \rangle$



**Figura 2.3**

■

## Campos Gradientes

Se  $f$  é uma função escalar no  $\mathbb{R}^2$  podemos dizer que seu gradiente  $\nabla f$  (ou  $\text{grad}f$ ) é definido por

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}$$

Sendo  $\nabla f$  um campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$ , logo, é denominado **campo vetorial gradiente**. De mesma maneira, se  $f$  for uma função escalar no  $\mathbb{R}^3$ , seu gradiente é uma campo vetorial em  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}$$

**Exemplo II** Determine o campo vetorial gradiente de  $f(x, y) = x^2y - y^3$ .

**Solução** O campo vetorial gradiente é dado por

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$$

Um campo vetorial  $\mathbf{F}$  é chamado **campo vetorial conservativo** se ele for gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função  $f$  tal que  $\mathbf{F} = \nabla f$ . Nessa situação,  $f$  é denominada **função potencial** de  $\mathbf{F}$ .

## Rotacional de um Campo de vetores

Consideremos o campo vetorial  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  definido em  $\mathbb{R}^3$  suponhamos que as derivadas parciais de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  são admitidas, o **rotacional** de  $\mathbf{F}$  que é indicado por  $\text{rot}\mathbf{F}$ , é o campo vetorial definido em  $\mathbb{R}^3$  e dado por

$$\boxed{1} \quad \text{rot}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Podemos reescrever a Equação 1 utilizando a notação de operadores, sendo assim usaremos o operador diferencial vetorial  $\nabla$  (“del”) como

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Podemos expressar  $\text{rot}\mathbf{F}$  como um produto vetorial de  $\nabla$  pelo campo vetorial  $F$ , como segue:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\ &= \text{rot } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{2} \quad \text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$$

**Exemplo 1** Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ , determine o rotacional de  $\mathbf{F}$ .

**Solução** Podemos fazer da seguinte forma, utilizaremos a Equação 2

$$\begin{aligned} \text{rot}\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{k} \\ &= (-2y - xy)\mathbf{i} - (0 - x)\mathbf{j} + (yz - 0)\mathbf{k} \\ &= -y(2 + x)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k} \end{aligned}$$

■

## Divergência de um Campo de Vetores

Seja  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  um campo vetorial definido em  $\mathbb{R}^3$  e suponhamos que existam  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial Q/\partial y$  e  $\partial R/\partial z$ , então o **divergente de  $\mathbf{F}$**  é a função de três variáveis definida por

$$\boxed{3} \quad \text{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Podemos observar que  $\text{rot}\mathbf{F}$  é um campo vetorial, mas  $\text{div}\mathbf{F}$  é um campo escalar. Na notação de operador gradiente  $\nabla = (\partial P/\partial x)\mathbf{i} + (\partial Q/\partial y)\mathbf{j} + (\partial R/\partial z)\mathbf{k}$ , o divergente de  $\mathbf{F}$  pode ser escrito como produto escalar de  $\nabla$  e  $\mathbf{F}$ :

$$\boxed{4} \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

**Exemplo II** Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}$ , encontre  $\operatorname{div} \mathbf{F}$ .

*Solução:* Utilizando as Equações 3 ou 4, temos

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

■

## Capítulo 3

### Integrais de Linha

As integrais de linha são de uma importância fundamental em inúmeras aplicações, nomeadamente em ligações com energia potencial, fluxo do calor, circulação de fluídos, etc.

Nesta seção, definiremos uma integral que é semelhante à integral unidimensional, exceto que, em vez de integrarmos sobre um intervalo  $[a, b]$ , integraremos sobre uma curva  $C$ . Apresentaremos conceitos e daremos definições à cerca da integral de linha. Veremos suas aplicações ao anunciarmos suas propriedades fundamentais.

Seja  $C$  uma curva unindo dois pontos  $A$  e  $B$ , definida parametricamente por,

$$\boxed{1} \quad x = x(t) \quad y = y(t) \quad a \leq t \leq b$$

consideremos em  $C$  os pontos  $A = P_0, P_1, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, P_n = B$ , correspondentes a uma partição do intervalo  $[a, b]$ , seja ainda  $f(x, y, z)$  um campo escalar contínuo definido num domínio  $D \subset \mathbb{R}^3$  contendo a curva  $C$  e suponhamos ainda que a função  $f(x, y, z)$  é positiva em  $D$ , ou seja,  $f(x, y, z) \geq 0, \forall (x, y, z) \in D$ .

Seja  $Q_i$  um ponto arbitrário escolhido no arco  $P_{i-1}P_i$  em que o comprimento deste arco é dado por  $\Delta s_i$ . Ao calcularmos o valor de  $f(Q_i)$  e multiplicando por  $\Delta s_i$ , temos então,

$$\sum_{i=1}^n f(Q_i) \Delta s_i$$

**Definição** A integral de linha de  $f(x, y, z) ds$  ao longo da curva  $C$  é o limite dessa soma quando o número de subdivisões  $n$  se aproxima do infinito fazendo o comprimento de cada arco se aproximar a zero:

$$\boxed{2} \int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x, y, z) \Delta s_i$$

Sabendo que o comprimento da curva  $C$  é dado por:

$$\boxed{3} \quad L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

Se  $f$  é uma função contínua então o limite de  $\int_C f(x, y, z) ds$  sempre existe e a fórmula seguinte pode ser usada para calcular a integral de linha:

$$\boxed{4} \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

**Exemplo I** Calcule  $\int_C (2 + x^2y) ds$ , onde  $C$  é a metade superior do círculo unitário  $x^2 + y^2 = 1$ .

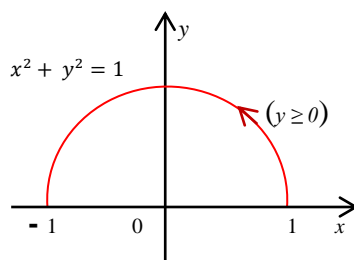
**Solução** Para utilizarmos a equação [4] dada anteriormente, precisamos de equações paramétricas que representam a curva  $C$ , assim:

$$x = \cos t \quad y = \sin t$$

e a metade superior do círculo (Figura 3.2) é descrita pelo parâmetro  $0 \leq t \leq \pi$ , logo temos:

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt \left[ 2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi = 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■



**Figura 3.1**

**Obs.** Caso  $C$  seja uma **curva lisa por partes**; ou seja,  $C$  é a união de um número finito de curvas lisas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Neste caso, definimos a integral de  $f$  ao longo de  $C$  como a soma das integrais de  $f$  ao longo de cada trecho liso de  $C$ .

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y, z) ds$$

Podemos definir três outras integrais, elas são chamadas **integrais de linha de  $f$  ao longo de  $C$  com relação a  $x, y$  e  $z$** , para isso basta que trocamos  $\Delta s_i$  por  $\Delta s_x, \Delta s_y$  ou  $\Delta s_z$ , veremos:

$$[5] \int_C f(x, y, z) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x, y, z) \Delta s_x$$

$$[6] \int_C f(x, y, z) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x, y, z) \Delta s_y$$

$$[7] \int_C f(x, y, z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x, y, z) \Delta s_z$$

Ao fazermos  $t: x = x(t), y = y(t), dx = x'(t) dt, dy = y'(t) dt, z = z(t), dz = z'(t) dt$  podemos escrever as seguintes fórmulas em relação a  $x, y$  e  $z$ .

$$\boxed{8} \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt$$

$$\boxed{9} \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt$$

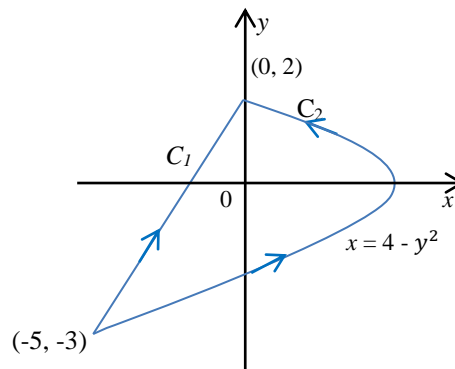
$$\boxed{10} \int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt$$

**Obs.** frequentemente precisamos parametrizar um segmento de reta e, por tanto é útil lembrarmos que a representação vetorial de um segmento de reta que inicia em  $\mathbf{r}_0$  e termina em  $\mathbf{r}_1$  é dada por

$$\boxed{11} \quad \mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1 \quad 0 \leq t \leq 1$$

**Exemplo II** Calcule  $\int_C y^2 dx + x dy$ , (Figura 3.3) onde:

- a)  $C = C_1$  é o segmento de reta de  $(-5, -3)$  a  $(0, 2)$ ;
- b)  $C = C_2$  é o arco da parábola  $x = 4 - y^2$  de  $(-5, -3)$  a  $(0, 2)$



**Figura 3.2**

**Solução**

- a) A representação paramétrica para o segmento de reta é

$$x = 5t - 5 \quad y = 5t - 3 \quad 0 \leq t \leq 1$$

Assim,  $dx = 5dt$ ,  $dy = 5dt$ , logo,

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x dy &= \int_0^1 (5t - 3)^2 (5dt) + (5t - 5)(5dt) \\ &= 5 \int_0^1 (25t^2 - 25t + 4) dt \\ &= 5 \left[ \frac{25}{3} t^3 - \frac{25}{2} t^2 + 4t \right]_0^1 = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

- b) Como a parábola é dada em função de  $y$ , usamos  $y$  como parâmetro e escrevemos  $C_2$  como

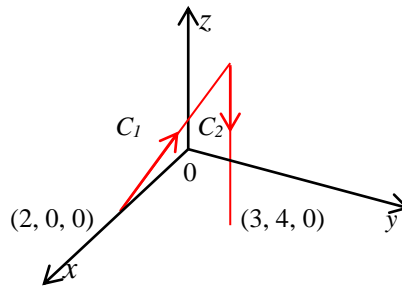
$$x = 4 - y^2 \quad y = y \quad -3 \leq y \leq 2$$

então,  $dx = -2ydy$  e, pela Fórmula  $\boxed{9}$ , temos

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} y^2 dx + x dy &= \int_{-3}^2 y^2 (-2y) dy + (4 - y^2) dy \\
&= \int_{-3}^2 (-2y^3 - y^2 + 4) dy \\
&= \left[ -\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right]_{-3}^2 = 40\frac{5}{6}
\end{aligned}$$

■

**Exemplo** Calcule  $\int_C y dx + z dy + x dz$ , onde  $C$  consiste no segmento de reta  $C_1$  que une  $(2, 0, 0)$  a  $(3, 4, 5)$  seguido pelo segmento de reta vertical  $C_2$  de  $(3, 4, 5)$  a  $(3, 4, 0)$ .



**Figura 3.3**

**Solução** Veja Figura 3.4. Utilizando a Equação [11](#), escreveremos  $C_1$  como

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 2, 0, 0 \rangle + t\langle 3, 4, 5 \rangle = \langle 2 + t, 4t, 5t \rangle$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} y dx + z dy + x dz &= \int_0^1 (4t) dt + (5t) 4 dt + (2 + t) 5 dt \\
&= \int_0^1 (10 + 29t) dt = 10t + 29\frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 24,5
\end{aligned}$$

Da mesma maneira,  $C_2$  pode ser escrito na forma

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 4, 5 \rangle + t\langle 3, 4, 0 \rangle = \langle 3, 4, 5 - 5t \rangle$$

Então

$$\int_{C_2} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 3(-5) dt = -15$$

Somando os valores das integrais, obtemos

$$\int_C y dx + z dy + x dz = 24,5 - 15 = 9,5$$

## Integrais de Linhas de Campos vetoriais

Já se precede algumas definições de integral de linha, o tipo de integral de linha que vamos mencionar aqui apresenta a definição mais elaborada de trabalho (deslocamento da força no tempo) sendo assim definindo força e deslocamento como vetores.



**Definição** Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial contínuo definido sobre uma curva  $C$  dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $a \leq t \leq b$ . Então, a **integral de linha de  $\mathbf{F}$  ao longo de  $C$**  é

$$\boxed{12} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$$

**Obs.** Na equação da definição acima,  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  é uma abreviação para  $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$  e  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$  deve ser calculada tomando  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  na expressão de  $\mathbf{F}(x, y, z)$ .

**Exemplo** Determine o trabalho feito pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$  ao se mover uma partícula ao longo de uma quarta de círculo  $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Solução** Como  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$ , temos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t \mathbf{i} - \cos t \sin t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

Portanto o trabalho realizado é

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} (-2 \cos^2 t \sin t) dt \\ &= 2 \left[ \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

## Teorema Fundamental das Integrais de Linha

Lembrando-se do Teorema Fundamental do Cálculo, temos a seguinte equação

$$\boxed{1} \quad \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

onde  $F$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ .

Se considerarmos  $F$  gradiente de alguma função  $f$  na região  $\mathbb{R}$ , ou seja,  $F = \nabla f$  em  $\mathbb{R}$ , então podemos considerar o teorema seguinte como Teorema Fundamental do Cálculo para as integrais de linha.

**Teorema** Seja  $C$  uma curva lisa dada pela função vetorial  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Seja  $f$  uma função diferencial de duas ou três variáveis cujo vetor gradiente  $\nabla f$  é contínuo em  $C$ . Então

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

**Obs.** Se  $f$  é uma função de duas variáveis e  $C$ , uma curva plana com início em  $A(x_1, y_1)$  e término em  $B(x_2, y_2)$ . O Teorema fica assim

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

**Obs.2** Se  $f$  é uma função de três variáveis e  $C$ , uma curva espacial ligando o ponto  $A(x_1, y_1, z_1)$  ao ponto  $B(x_2, y_2, z_2)$ , então temos

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Agora com este caso, veremos a demonstração do Teorema 2.

**Demonstração do Teorema 2** Usando a definição 4.1.12, temos

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \end{aligned}$$

■

**Exemplo** Determine o trabalho realizado pelo campo gravitacional

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

ao mover uma partícula de massa  $m$  do ponto  $(3, 4, 12)$  para o ponto  $(2, 2, 0)$  ao longo da curva lisa por partes  $C$ .

**Solução** Sabemos que  $\mathbf{F}$  é um campo vetorial conservativo, logo,  $\mathbf{F} = \nabla f$ , onde

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Portanto, pelo Teorema 2, trabalho realizado é

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) \\ &= \frac{mMG}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = mMG \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13} \right) \end{aligned}$$

■

## Independência do caminho

Vimos no Exemplo II da Seção 3.2 que curvas diferentes, consideremos assim  $C_1$  e  $C_2$ , tendo o mesmo ponto inicial  $A$  e mesmo ponto final  $B$  não acontece  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ . Porém, do Teorema 2 temos que

$$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$

sempre que  $\nabla f$  for contínua.

**Definição** Seja  $\mathbf{F}$  um campo vetorial contínuo com domínio  $D$ , dizemos que a integral de linha  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é **independente do caminho** se  $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  para quais quer dois caminhos  $C_1$  e  $C_2$  em  $D$  que tenham os mesmos pontos iniciais e finais. Com isso podemos dizer que as *integrais de linha de campos conservativos são independentes do caminho*.

**Definição** Uma curva é dita **fechada** se seu ponto final coincide com seu ponto inicial, ou seja,  $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ .

3 **Teorema**  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  é independente do caminho em  $D$  se e somente se  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para todo caminho fechado  $C$  em  $D$ .

Como a integral de linha de qual quer campo vetorial conservativo  $\mathbf{F}$  é independente do caminho, segue que  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$  para qualquer campo vetorial fechado.

**Obs.** Uma curva que não se auto intercepta em nenhum ponto entre as extremidades é dita **curva simples**.

4 **Teorema** Se  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  é um campo vetorial conservativo, onde  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio  $D$ . então em todos os pontos de  $D$  temos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

**Obs.** Para o próximo Teorema, precisaremos de uma condição, uma **região simplesmente conexa** em um plano é uma região simplesmente conexa  $D$  tal que toda curva simples fechada em  $D$  contorna somente pontos que estão em  $D$ .

5 **Teorema** Seja  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$  um campo vetorial sobre uma região  $D$  aberta simplesmente conexa. Suponha que  $P$  e  $Q$  tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{em } D$$

Então  $\mathbf{F}$  é conservativo.

**Exemplo I** Determine se o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$  é ou não conservativo.

**Solução** Seja  $P(x, y) = x - y$  e  $Q(x, y) = x - 2$ . Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Portanto  $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ , pelo Teorema 4,  $\mathbf{F}$  não é conservativo. ■

**Exemplo II** Determine se o campo vetorial  $\mathbf{F}(x, y) = (3 - 2x - y)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$  é ou não conservativo.

**Solução** Seja  $P(x, y) = 3 - 2x - y$  e  $Q(x, y) = x^2 - 3y^2$ . Então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Como  $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ , pelo Teorema 4,  $\mathbf{F}$  é conservativo. ■

**Exemplo III** Se  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\mathbf{j} + 3ye^{3z}\mathbf{k}$ , determine uma função  $f$  tal que  $\nabla f = \mathbf{F}$ .

**Solução** Se existe tal que  $f$ , então

$$\boxed{6} \quad f_x(x, y, z) = y^2$$

$$\boxed{7} \quad f_x(x, y, z) = 2xy + e^{3z}$$

$$\boxed{8} \quad f_x(x, y, z) = 3ye^{3z}$$

Integrando (6) em relação a  $x$ , obtemos

$$\boxed{9} \quad f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$$

Onde  $g(y, z)$  é uma constante em relação a  $x$ . Então, derivando (9) em relação a  $y$ , temos

$$f_y(x, y, z) = 2xy + g_y(y, z)$$

e, comparando com (7), vem

$$g_y(y, z) = e^{3z}$$

Então,  $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$  e reescrevemos (9) como

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

Por fim, derivando em relação a  $z$  e comparando com (8), obtemos  $h'(z) = 0$  e, por fim,  $h(z) = K$ , uma constante. A função que queríamos então é

$$f_x(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

Logo, podemos ver que  $\nabla f = \mathbf{F}$ .

## Teorema de Green

Nesta seção, veremos que o Teorema de Green gera a relação que existe entre uma integral de linha ao longo de uma curva fechada simples  $C$  e uma integral dupla na região  $D$  do plano delimitado por  $C$ .

**Teorema de Green** Seja  $C$  uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja  $D$  a região delimitada por  $C$ . Se  $P$  e  $Q$  têm derivadas parciais de primeira ordem contínua sobre uma região aberta que contenha  $D$ , então

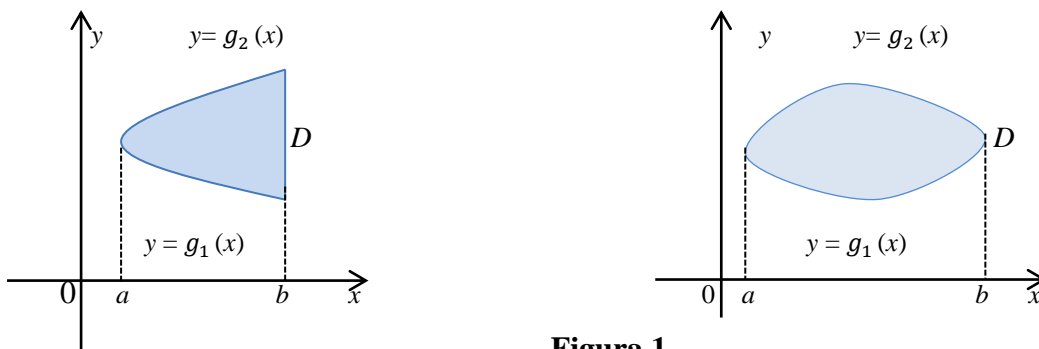
$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Demonstraremos o Teorema de Green para o caso especial, onde as curvas são regiões as quais chamamos de **regiões simples** onde essas regiões são do tipo I e II.

**Definição** Uma região é dita do **tipo I** se for a região entre o gráfico de duas funções contínuas de  $x$ , ou seja,

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

onde  $g_1$  e  $g_2$  são contínuas em  $[a, b]$ . Vejamos alguns exemplos de regiões do tipo I na Figura 1.

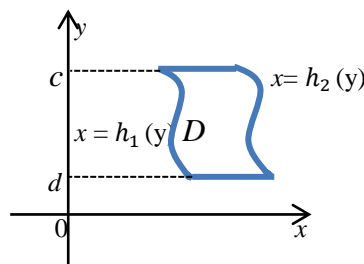


**Figura 1**

Consideremos também regiões planas do **tipo II**, que podem ser expressas da forma

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

onde  $h_1$  e  $h_2$  são contínuas. Vejamos o exemplo de regiões do tipo II na Figura 2.



**Figura 2**

**Demonstração** O Teorema de Green estará demonstrado ao mostrarmos a veracidade de

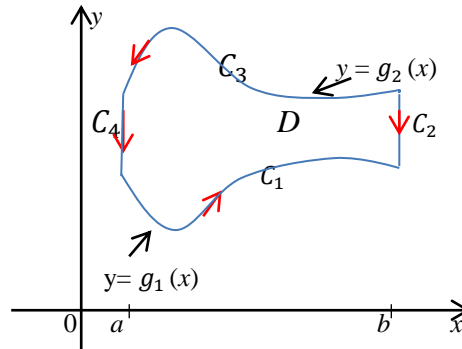
$$\boxed{1} \quad \int_C P dx = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA$$

e

$$\boxed{2} \quad \int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA$$

Vamos iniciar fazendo a demonstração da Equação I, fazendo  $D$  como uma região do tipo I;

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



**Figura 4**

assim, da Equação (1), segue que

$$\boxed{3} \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} (x, y) dy dx = \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx$$

Faremos  $C$  como a união das quatro curvas  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ , como podemos observar na Figura 4. Sobre  $C_1$ , façamos  $x$  como parâmetro e escrevemos as equações como  $x = x, y = g_1(x), a \leq x \leq b$ . Com efeito,

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Observe que  $C_3$  vai da direita para a esquerda, porém,  $-C_3$  vai da esquerda para a direita, suas equações paramétricas podem ser escritas como  $x = x, y = g_2(x), a \leq x \leq b$ . Por tanto

$$\int_{C_3} P(x, y) dx = - \int_{-C_3} P(x, y) dx = - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx$$

Sobre  $C_2$  ou  $C_4$ , nestes casos podemos ver que ambas podem se reduzidas a um único ponto, então  $x$  é constante e assim  $dx = 0$  e

$$\int_{C_2} P(x, y) dx = 0 = \int_{C_4} P(x, y) dx$$

Com tudo,

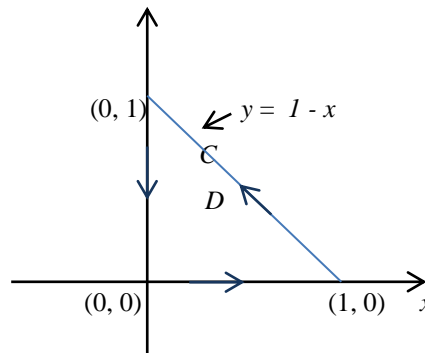
$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx &= \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx - \int_a^b P(x, g_2(x)) dx \end{aligned}$$

Logo, se comparada com a Equação (3), vemos que

De forma análoga podemos demonstrar a Equação (2), basta exprimir  $D$  como uma região do tipo II. Com a soma destas duas Equações (2) e (3), obtemos o Teorema de Geen. ■

**Exemplo I** Calcule  $\int_C x^4 dx + xy dy$ , onde  $C$  é a curva triangular constituída pelos segmentos de reta  $(0, 0)$  a  $(1, 0)$ , de  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$  e de  $(0, 1)$  a  $(0, 0)$ .

A região  $D$  limitada por  $C$  é ilustrada na Figura 5.



**Figura 5**

Podemos ver que a região  $D$  englobada por  $C$  é simples e tem orientação positiva. Vamos usar o Teorema de Green, fazendo  $P(x, y) = x^4$  e  $Q(x, y) = xy$ , temos então

$$\begin{aligned} \int_C x^4 dx + xy dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} (y - 0) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 dx \\ &= -\frac{1}{6} (1-x)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

■

## Aplicações da Integral de Linha de um Campo Vetorial

### Cálculo do Trabalho realizado por uma Força

- 1- Seja  $C$  a parte da parábola  $y = x^2$  entre  $(0, 0)$  e  $(3, 9)$ . Se  $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$  é uma força que atua em  $(x, y)$ , encontre o trabalho realizado por  $\mathbf{F}$  ao longo de  $C$ .

**Solução** Uma parametrização de  $C$  é dada por

$$x = t, y = t^2 \text{ e } 0 \leq t \leq 3$$

temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} \\ \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= -t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{j} \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^3 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^3 (-t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} + 2t \mathbf{j}) dt = \int_0^3 (-t^2 + 2t^2) dt \\ &= \int_0^3 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^3 = 9 \text{ unidades de trabalho.}\end{aligned}$$

■

2- Determine o trabalho realizado pelo campo de força  $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$  ao mover:

- do ponto  $(3, 0, 0)$  para o ponto  $(0, 2, 3)$  passando por uma reta;
- do ponto  $(3, 0, 0)$  para o ponto  $(0, \frac{\pi}{2}, 3)$  pela hélice  $x = 3\cos t, y = t, z = 3\sin t$

*Solução a)* A representação paramétrica para o segmento de reta é

$$x = 3 - 3t \quad y = 2t \quad z = 3t \quad 0 \leq t \leq 1$$

temos,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= (3 - 3t) \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(t) &= -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= 3t \mathbf{i} + (3 - 3t) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^1 (3t \mathbf{i} + (3 - 3t) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) dt = \int_0^1 (-9t + 6) dt \\ &= \left. \frac{-9t^2}{2} + 6t \right|_0^1 = \frac{3}{2} \text{ unidades de trabalho.}\end{aligned}$$

*Solução b)* Sabemos que

$$x = 3\cos t \quad y = t \quad z = 3\sin t \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= 3\cos t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + 3\sin t \mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(t) &= -3\sin t \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\cos t \mathbf{k} \\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= 3\sin t \mathbf{i} + 3\cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \\ \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi/2} (3\text{sent}\mathbf{i} + 3\text{cost}\mathbf{j} + t\mathbf{k}) \cdot (-3\text{sent}\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\text{cost}\mathbf{k}) dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (-9\text{sent} + 3\text{cost} + 3\text{cost}) dt \\
&= \left. \frac{-9t}{2} + \frac{9}{4}\text{sen}2t - 3\text{sent} + 3t\text{cost} - 3\text{sent} \right]_0^{\pi/2} = \frac{-9\pi}{4} - 3 \text{ unidades de trabalho.}
\end{aligned}$$

■

### Cálculo de Área utilizando o Teorema de Green

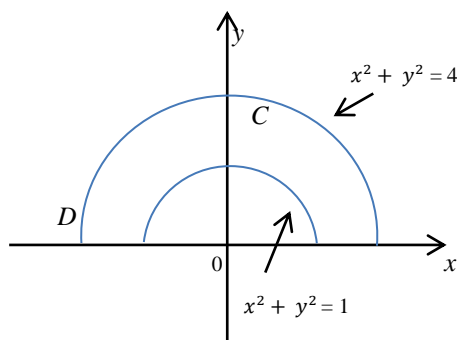
- 1- Calcule  $\oint_C y^2 dx + 3xy dy$ , onde  $C$  é a fronteira da região semianular  $D$  contida no semiplano superior entre os círculos  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ .

**Solução** (veja Figura 6). Podemos escrever a integral dupla em coordenadas polares,

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

Portanto, o teorema de Green nos fornece

$$\begin{aligned}
\oint_C y^2 dx + 3xy dy &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA \\
&= \iint_D y dA = \int_0^\pi \int_1^2 (r \text{sen}\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta \int_1^2 r^2 = [-\cos\theta]_0^\pi \left[ \frac{1}{3}r^3 \right]_1^2 = \frac{14}{3}
\end{aligned}$$



**Figura 1**

■

- 2- Use o teorema de Green para calcular  $\int_C x^2 y dx - xy^2 dy$ , onde  $C$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 4$  orientado no sentido anti-horário.

**Solução** A região  $D$  delimitada por  $C$  é o círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , então vamos primeiro aplicar o teorema de Green depois faremos a transformação para coordenadas polares:

$$\int_C x^2 y dx - xy^2 dy$$

$$= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) \right] dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -y^2 - x^2 dA$$

Veja que:

$$D = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

logo,

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^2 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 -r^3 dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} -4 d\theta = -4\theta \Big|_0^{2\pi} = -8\pi$$

■

## Capítulo 4

### Considerações Finais

Aproxima-se o fim...

Este fim é o fim de uma graduação, um sonho se concretizando. E com a conclusão deste trabalho me causando assim graduada, não somente graduada, mas licenciada em matemática que é para mim um sonho muito esperado. Ficam as boas lembranças as saudades e os agradecimentos...

Agora, se falando do trabalho, este, tendo um capítulo com parte da história matemática e outro se tratando do estudo do Cálculo, abordando também um pouco o cálculo vetorial, as integrais de linha e finalizando com algumas aplicações.

Com isso, os parágrafos deste trabalho foram escritos satisfatoriamente, pois o prazer de estudar este tema teve sua contribuição com as boníssimas aulas durante esse tempo de graduação.

E ao estudar sobre o que seria abordado no trabalho As Integrais de Linha, vi que seria interessante escrever, mesmo que poucas linhas, a respeito da história matemática, falando assim de alguns precursores contribuintes ao surgimento do Cálculo.

Não é conclusivo o estudo do cálculo e da vida desses estudiosos contribuintes para o surgimento do Cálculo, porém satisfatório para este trabalho, pois independente do que se tenha previsto para estudar, haverá sempre mais a conhecer.

## Referências

BOYER, Carl Benjamim. **Historia da matemática**. São Paulo: Edgard Bluchher, 1974.

EVES, Howard. **Introdução à historia da matemática**. Campinas- São Paulo: 2004.

SWOKOWSKI, Earl. **Cálculo com geometria analítica vol. 2**. São Paulo: Mc Graw- Hill do Brasil, 1983.

STEWART, James. **Calculo: volume 2**. São Paulo: CengageLearnin, 2009.